

Trotter積公式の更なる展開と経路積分の問題

著者	一瀬 孝
雑誌名	平成19(2007)年度 科学研究費補助金 基盤研究(B) 研究成果報告書
巻	2004-2006
ページ	21p.
発行年	2007-03-01
URL	http://hdl.handle.net/2297/48233

Trotter 積公式の更なる展開と経路積分の問題

1 6 3 4 0 0 3 8

平成 1 6 年度－平成 1 8 年度科学研究費補助金
(基盤研究 (B)) 研究成果報告書

平成 1 9 年 3 月

研究代表者 一 瀬 孝

金沢大学自然科学研究科 名誉教授

金沢大学附属図書館



0800-04419-3

Trotter 積公式の更なる展開と経路積分の問題

1 6 3 4 0 0 3 8

平成 1 6 年度－平成 1 8 年度科学研究費補助金
(基盤研究 (B)) 研究成果報告書

平成 1 9 年 3 月

研究代表者 一 瀬 孝

金沢大学自然科学研究科 名誉教授

・研究発表 (1) 学会誌等

一瀬 孝 Takashi Ichinose

1. (with H. Neidhardt and V. A. Zagrebnov)
Trotter–Kato product formula and fractional powers of self-adjoint generators,
J. Functional Analysis **207** (2004), 33–57.
2. *Recent results on the selfadjoint Trotter–Kato product formula in operator norm with open problems*,
京都大学数理解析研究所講究録 **1389** 「調和解析と非線形偏微分方程式」, 2004 年 7 月, pp. 21–26.
3. *The selfadjoint Lie–Trotter–Kato product formula in operator norm and time-sliced approximation to imaginary-time path integral*,
In: STOCHASTIC ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS (SAMP/ ANESTOC 2002) : Proceedings of the Mathematical Legacy of R P Feynman, Lisbon, Portugal, 25–28 June 2002, pages 77–90; Proceedings of the Open Systems and Quantum Statistical Mechanics, Santiago, Chile, 7–11, January 2002, edited by R. Rebolledo (Chile), J. Rezende and J.-C. Zambrini (Portugal), World Scientific Publ. 2004.
4. (with Hideo Tamura)
Sharp error bound on norm convergence of exponential product formula and approximation to kernels of Schrödinger semigroups,
Comm. Partial Differential Equations, **29** (2004), Nos. 11, 12, 1905–1918.
5. (with Hideo Tamura)
Note on the norm convergence of the unitary Trotter product formula,
Letters in Mathematical Physics, **71** (2004), 65–81.
6. (with Masato Wakayama)
Special values of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator and confluent Heun equations,
Kyushu J. Math., **59** (2005), 39–100.
7. (with Hideo Tamura)
*Erratum to [The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound, Commun. Math. Phys., **217** (2001), No.3, 489–502]*,
Commun. Math. Phys., **254** (2005), No.1, 255–255.
8. *Path integral for the radial Dirac equation*,
J. Math. Phys. **46** (2005), 022103-1–022103-19.

9. (with Masato Wakayama)
Zeta functions for the spectrum of the non-commutative harmonic oscillators,
 Commun. Math. Phys. **258** (2005), no.3, 697–739.
10. (with Pavel Exner) *A product formula related to quantum Zeno dynamics*,
 Ann. H. Poincaré **5** (2005), 195–215.
11. (with Pavel Exner)
Product formula for quantum Zeno dynamics, In: *Proceedings of the XIV International Congress of Mathematical Physics* ($M \cap \Phi$), Lisbon, July 28–Aug 2, 2003, ed. J.-C. Zambirini, World Scientific 2005, pp. 601–604.
12. (with Pavel Exner)
On existence of quantum Zeno dynamics, In: *QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis, Vol. 19, Quantum Information and Computing* edited by L. Accardi, M. Ohya and N. Watanabe, World Scientific 2006, pp. 72–60.
13. (with Hideo Tamura) *Exponential product approximation to integral kernel of Schrödinger semigroup and to heat kernel of Dirichlet Laplacian*, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **592** (2006), 157–188.
14. (with P. Exner, H. Neidhardt and V. A. Zagrebnov) *Zeno product formula revisited*, *Integral Equations Operator Theory*, **57** (2007), No.1, 67–81.
15. *On path integral for the radial Dirac equation*, In: *The Proceedings of the International Conference “Path Integrals from Quantum Information to Cosmology”*, Prague, June 6–10, 2005, edited by C. Burdick et al., Joint Institute for Nuclear Research, 2005, Dubna, Russia (CD-ROM edition, ISBN 5-9530-0100-2).
16. (with Pavel Exner and Sylwia Kondej) *On relations between stable and Zeno dynamics in a leaky graph decay model*, to appear in *Proceedings of the Conference “Operator Theory and Mathematical Physics”*, Bedlewo 2004, Birkhäuser.
17. *A Path Integral Preliminary Approach to the FKG inequality for Yukawa₂ Quantum Field Theory*,
 京都大学数理解析研究所講究録 No.1892 「繰り込み群の数理解析科学での応用」, pp.225–230, 2006 年 4 月 [研究集会 2005 年 9 月 7 日–9 月 9 日].
18. *On a product formula for quantum Zeno dynamics*,
 京都大学数理解析研究所講究録 No.1507 「量子解析におけるミクロ・マクロ双対性」, pp.95–99, 2006 年 7 月 [研究集会 2005 年 11 月 21 日–11 月 23 日].
19. (with Masato Wakayama)
On the spectral zeta function for the non-commutative harmonic oscillator, to appear

in Proceedings of the 21st Max Born Symposium on Mathematical Problems in Nonrelativistic Quantum Mechanics, Wrocław, June 26–28, 2006.

田村 博志 Hiroshi Tamura

1. (with K. R. Ito) *Random point fields for para-particles of order 3*,
京都大学数理解析研究所講究録「繰り込み群の数理解科学での応用」, 第4回, No.1482 (2006), 72–85.
2. (with K. R. Ito and F. Hiroshima) *Fourier transformation of 2D $O(N)$ spin model and Anderson localization*,
京都大学数理解析研究所講究録「繰り込み群の数理解科学での応用」, 第4回, No.1482 (2006), 205–224.
3. (with K. R. Ito) *A canonical ensemble approach to the Fermion/Boson random point processes and its application*,
Commun. Math. Phys., **263** (2006), 353–380.
4. (with K. R. Ito) *A random point field related to Bose–Einstein condensation*,
to appear in J. Funct. Analysis.
5. (with K. R. Ito) *Random point fields for para-particles of any order*, to appear in J. Math. Phys.

高信 敏 Satoshi Takanobu

1. 極限定理から確率解析へ, 数学セミナー 43 巻 (2004), no.1, 30–33, 日本評論社。
2. (with Hiroshi Sugita) *The probability of two F_q -polynomials to be coprime*,
to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics, **43**, 2006: International Conference on Probability and Number Theory, Kanazawa 2005.

中尾 慎太郎 Shintaro Nakao

1. *An extension of Stieltjes–Young integrals*,
Science Reports of Kanazawa University, **48** (2004), No.1-2, 1–3.
2. *A representation of continuous additive functionals of zero energy*,
Science Reports of Kanazawa University, **48** (2004), No.1-2, 5–7.

藤原 大輔 Daisuke Fujiwara

1. (with Naoto Kumano-go) *Smooth functional derivatives in Feynman path integrals by time slicing approximation*,
Bulletin des Sciences Mathématiques, **129** (2005), 57–79.

2. (with Naoto Kumano-go) *An improved remainder estimate of stationary phase method for some oscillatory integrals over a space of large dimension*, Funkcialaj Ekvacioj, **49** (2006), 59–86.
3. (with Naoto Kumano-go)
The second term of the semi-classical asymptotic expansion of Feynman path integrals with integrand of polynomial growth, In: Proc. of the 8-th International Conference “Path Integrals from Quantum Information to Cosmology”, Prague, June 6–10, 2005, edited by C. Burdick et al., Joint Institute for Nuclear Research, 2005, Dubna, Russia (CD-ROM edition, ISBN 5-9530-0100-2).
4. (with Naoto Kumano-go)
The second term of the semi-classical asymptotic expansion for Feynman path integrals with integrand of polynomial growth, J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), No. 3, 837–867.

田村 英男 Hideo Tamura

1. *Scattering of Dirac particles by electromagnetic fields with small support in two dimensions and effect from scalar potentials*, Ann. Henri Poincaré **5** (2004), no. 1, 75–118.
2. (with Takashi Ichinose)
Sharp error bound on norm convergence of exponential product formula and approximation to kernels of Schrödinger semigroups, Comm. Partial Differential Equations, **29** (2004), Nos. 11, 12, 1905–1918.
3. (with Takashi Ichinose)
Note on the norm convergence of the unitary Trotter product formula, Letters in Mathematical Physics, **71** (2004), 65–81.
4. (with Takashi Ichinose)
*Erratum to [The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound, Commun. Math. Phys., **217** (2001), No.3, 489–502]*, Commun. Math. Phys., **254** (2005), No.1, 255–255.
5. (with Takashi Ichinose)
Exponential product approximation to integral kernel of Schrödinger semigroup and to heat kernel of Dirichlet Laplacian, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **592** (2006), 157–188.
6. (with H. T. Ito)
Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields, J. London Math. Soc., **74** (2006), 695–716.

7. *Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields: total cross sections*,
to appear in Ann. Henri Poincaré.

谷島 賢二 Kenji Yajima

1. (with Zhang, Guoping)
Local smoothing property and Strichartz inequality for Schrödinger equations with potentials superquadratic at infinity,
J. Differential Equations **202** (2004), no. 1, 81–110.
2. *Time-periodic Schrödinger equations*,
In: Topics in the Theory of Schrödinger Operators, (eds: H.Araki and H.Ezawa),
pp. 9–69, World Scientific 2004.
3. (with A. Galtbayer and A. Jensen)
Local time-decay of solutions to Schrödinger equations with time-periodic potentials,
J. Statist. Phys. **116** (2004), no.1–4, 231–282.
4. *Dispersive estimate for Schrödinger equations with threshold resonance and eigenvalues*,
Commun. Math. Phys. **259** (2005), no. 2, 475–509.
5. *On time dependent Schrödinger equations*,
In: Dispersive nonlinear problems in mathematical physics, ed. P. D’Ancona and V. Georgev, Quaderni di Matematica **15**, Seconda Università di Napoli (2005), 267–329.
6. *The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities I, Odd dimensional case*,
J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), 43–93.
7. (with D. Finco)
The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities II, Even dimensional case,
J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), 277–346.
8. (with A. Jensen)
On L^p boundedness of wave operators for Four dimensional Schrödinger operators,
to appear.

Pavel Exner (本研究課題と関連するもののみ)

1. (with Takashi Ichinose and Sylwia Kondej)
On relations between stable and Zeno dynamics in a leaky graph decay model, to appear in Proceedings of the Conference “Operator Theory and Mathematical Physics”, Bedlewo 2004, Birkäuser.
2. (with Takashi Ichinose)
A product formula related to quantum Zeno dynamics,
 Ann. H. Poincaré 5 (2005), 195–215.
3. (with Takashi Ichinose)
Product formula for quantum Zeno dynamics, In: *Proceedings of the XIV International Congress of Mathematical Physics* ($M \cap \Phi$), Lisbon, July 28–Aug 2, 2003, ed. J.-C. Zambirini, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, pp. 601–604.
4. Alberverio, S.; Gesztesy, F.; Høegh-Krohn, R.; Holden, H., *Solvable models in quantum mechanics*, Second edition. With an appendix by Pavel Exner, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005. xiv+488 pp. ISBN: 0-8218-3624-2.
5. *Sufficient conditions for the anti-Zeno effect*, J. Phys. A 38 (2005), no. 24, L449–L454.
6. (with Takashi Ichinose)
On existence of quantum Zeno dynamics, In: *QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis, Vol. 19, Quantum Information and Computing* edited by L. Accardi, M. Ohya and N. Watanabe, World Scientific 2006, pp. 72–60.

Valentin A. Zagrebnov (本研究課題と関連するもののみ)

1. (with T. Ichinose and H. Neidhardt)
Trotter–Kato product formula and fractional powers of self-adjoint generators,
 J. Functional Analysis 207 (2004), 33–57.
2. *Trotter–Kato product formula: some recent results*,
Proceedings of the XIV International Congress of Mathematical Physics ($M \cap \Phi$),
 Lisbon, July 28–Aug 2, 2003, ed. J.-C. Zambirini, World Sci. Publ., Hackensack,
 NJ, 2005, pp. 634–641.

(2) 口頭発表

一瀬 孝 Takashi Ichinose

1. On the spectral zeta function for the non-commutative harmonic oscillator (a joint work with M. Wakayama), Seminar at Quantum Circle, DOPPLER INSTITUTE for mathematical physics at the Czech Technical University, Prague/Czech (2004 年 11 月 23 日).
2. On path integral for the radial Dirac equation, Workshop “Analyse en dimension infinie et intégrales de chemin”, Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM), (Organisers: Rémi Léandre and Cécile Dewitt-Morette) 2004 年 11 月 29 日–12 月 3 日, Luminy/Marseille, France (2004 年 11 月 30 日).
3. On the approximation to the Schrödinger semigroup (a joint work with Hideo Tamura), Informal Mathematical Seminar, Technische Universität Clausthal, Institut für Mathematik, Clausthal/Germany (2004 年 12 月 7 日).
4. On the approximation in norm and pointwise to the Schrödinger semigroup and its integral kernel by exponential product formula (a joint work with Hideo Tamura), Mathematisches Kolloquium, Technische Universität Clausthal, Institut für Mathematik, Clausthal/Germany (2004 年 12 月 8 日).
5. (with 田村 英男) Exponential product approximation to heat kernel of Dirichlet Laplacian and Zeno product, 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」(代表者: 中村周), 2004 年 12 月 20 日–12 月 22 日, 京都大学数理解析研究所 (2004 年 12 月 20 日).
6. On path integral for the radial Dirac equation, 関数方程式分科会研究集会「微分方程式の総合的研究」, 東京大学大学院数理解析科学科, 2004 年 12 月 25 日–26 日 (2004 年 12 月 25 日)
7. On path integral for the radial Dirac equation, The 8-th International Conference “Path Integrals from Quantum Information to Cosmology”, Prague/Czech Republic, June 6–10, 2005 (2005 年 6 月 7 日に講演)
8. 「経路積分・Trotter 積公式あれこれ」, 筑波大学数学系月例談話会, (2005 年 6 月 23 日)
9. On the norm convergence of the unitary Trotter product formula, 2005 年夏の作用素論シンポジウム, 富山県民会館 (2005 年 9 月 3 日)
10. A path integral preliminary approach to the FKG inequality for Yukawa₂ quantum field model, 研究集会「繰り込み群の数理解析での応用」(代表者: 伊東恵一), 京都大学数理解析研究所, 2005 年 9 月 7 日–9 月 9 日 (2005 年 9 月 9 日).
11. On a product formula related to quantum Zeno dynamics, Lecture at Mathematical Colloquium at Department of Mathematics, National Central University, Jhongli City/Taiwan (2005 年 9 月 29 日に講演).

12. (with Hideo Tamura) Recent Results on the Trotter Product Formula and Related Topics, Plenary Lecture at International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization with Its Applications (ICNAOA) 2005 (Organizer: Hang-Chin Lai), Chung Yuan Christian University, Chung-Li/Taiwan, September 30–October 3, 2005 (2005 年 9 月 30 日に講演).
13. Recent Results on the Trotter Product Formula and Related Topics (with Hideo Tamura), Invited Lecture at the International Workshop “Operator Semigroups, Evolution Equations and Spectral Theory in Mathematical Physics” (organized by V.A.Zagrebnov and E.M.Ouhbaz), C.I.R.M., Luminy/Marseille, October 3–7, 2005 (2005 年 10 月 4 日に講演)
14. On path integral for the radial Dirac equation, Seminar at Theoretical Physics Group, Dublin Institute for Advanced Studies, Dublin/Ireland (2005 年 10 月 12 日に講演).
15. On a product formula for quantum Zeno dynamics, 研究集会「量子解析におけるミクロ・マクロ双対性」(代表者：小嶋泉), 京都大学数理解析研究所, 2005 年 11 月 21 日–11 月 23 日 (2005 年 11 月 23 日に講演).
16. Note on path integral for systems with constraint, 研究集会「数理解物理と経路積分」, 金沢大学自然科学研究科棟 101 教室, 及び, いしかわシテイカレッジ (2006 年 3 月 9 日–10 日) (2006 年 3 月 10 日に講演).
17. 「経路積分, 指数積公式, そしてまた経路積分」, 日本数学会 年会, 企画特別講演, 中央大学理工学部, 2006 年 26 日–29 日 (2006 年 3 月 28 日に講演).
18. On the spectral zeta function for the non-commutative harmonic oscillator, Invited Lecture at the 21st Max Born Symposium “Mathematical Problems in Nonrelativistic Quantum Dynamics”, Institute of Theoretical Physics, University of Wrocław, Wrocław/Poland, June 26–28, 2006 (2006 年 6 月 27 日に講演).
19. A path integral representation for the Green’s function of the radial Dirac equation by a countably additive path space measure, The 9-th Vilnius International Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius/Lithuania, June 25–30, 2006 (2006 年 6 月 30 日に講演).
20. On convergence pointwise of integral kernels and in norm for exponential product formulas, Conference “Heat Kernels in Mathematical Physics” (organized by Wolfgang Arendt, Delio Mugnolo and Frank Steiner), Heinrich–Fabri Institute, Blaubeuren near Ulm/Germany, Nov.27–Dec. 2, 2006 (2006 年 11 月 28 日に講演).

田村 博志 Hiroshi Tamura

1. (with 伊東恵一 (摂南大学)) Fermion/Boson 過程と正準集団とその応用, 研究集会「確率過程とその周辺」, 名古屋大学シンポジオン会議室, 2004 年 12 月 7 日-10 日 (2004 年 12 月 8 日)
2. (with 伊東恵一 (摂南大学)) Boson/Fermion 過程と正準集団とその応用, 日本数学会 2005 年会「統計数学」, 日本大学理工学部駿河台校舎, 2005 年 3 月 27 日-30 日 (2005 年 3 月 27 日)
3. A canonical ensemble approach to determinantal random point fields, Second International Conference of Applied Mathematics at Technical University, Plovdiv/Bulgaria (2005 年 8 月 15 日).
4. 確率場による Boson, Fermion Para 粒子ガス, 研究集会「繰り込み群の数理科学での応用」, 京都大学数理解析研究所, 2005 年 9 月 7 日-9 月 9 日 (2005 年 9 月 8 日).
5. 3 次のパラ粒子を記述する確率場, 確率論シンポジウム (ポスターセッション) 京都大学百周年時計台記念館国際交流ホール, (2005 年 12 月 20 日).
6. 3 次のパラ統計から導かれる確率, 日本数学会年会, 統計数学分科会, 中央大学理工学部, 2006 年 3 月 26 日-3 月 29 日 (2006 年 3 月 27 日).
7. Ideal gases of bosons, fermions and/or para-particles in terms of random point fields, Séminaire de Mécanique Statistique & Matière Condensée, Centre de Physique Théorique (CPT), Luminy/Marseille (2006 年 7 月 5 日).
8. Ideal gases of bosons, fermions and/or para-particles in terms of random point fields, 研究集会 “LA JOURNÉE BOSONIQUE”, Centre de Physique Théorique, Luminy/Marseille (2006 年 7 月 10 日).
9. Ideal gas of para-particles in terms of random point fields, 研究集会「厳密統計力学と数学的場の量子論の現在」(Current Status of Rigorous Statistical Mechanics and Mathematical Quantum Field Theory) (九州大学数理学研究院 21 世紀 COE プログラム「機能数理学の構築と展開」による研究集会), 九州大学西新プラザ (2006 年 9 月 9 日).

高信 敏 Satoshi Takanobu

1. Rough path analysis 入門 — 解析的基礎部分の詳解, 「確率論サマースクール」, 九州大学, 2004 年 8 月 18 日-21 日。
2. Adelic formulation of number theoretic limit theorems (杉田 洋と共同研究), “International Conference on Probability and Number Theory, Kanazawa, 2005” (ポスターセッション) 金沢読売会館, 2005 年 6 月 20 日-24 日。
3. 有限整アデール環 $\hat{\mathbb{Z}}$ 上の極限定理, 東工大談話会, 東京工業大学 (2005 年 7 月 4 日)。

4. Rough path analysis 入門, 東工大での集中講義, 東京工業大学, 2005 年 7 月 5 日-8 日。
5. 加法的関数の確率拡張, 広島大確率論・力学系セミナー, 広島大学 (2005 年 11 月 15 日)。
6. 密度定理と極限定理 — 2 つの整数が互いに素である確率, 再訪, 広島大学での集中講義, 2005 年 11 月 14 日-18 日。
7. 無理数回転による擬似乱数, 再訪 — キャンセレーションの方法による安富の条件の改良 (山谷全幸との共同研究), 研究集会「確率論の極限定理の研究」, 九州大学 (2006 年 1 月 26 日)。
8. オイラー定数のランダム化, そのときに現われる極限定理 (杉田 洋と共同研究), 「確率論シンポジウム」, 九州大学 (2006 年 12 月 22 日)。

藤原 大輔 Daisuke Fujiwara

1. The second term of semi-classical asymptotics of some Feynman path integral, 第 70 回「学習院大学スペクトル理論セミナー」, 学習院大学 2004 年 12 月 18 日
2. The second term of Feynman path integrals with integrand of polynomial growth, The 8-th International Conference “Path Integrals from Quantum Information to Cosmology”, Prague, Czech Republic, June 6-10, 2005 (2005 年 6 月 8 日に講演)
3. The second term of the semi-classical asymptotic expansion of Feynman path integrals with integrand of polynomial growth, Institute of Mathematical Physics, St. Petersburg (Russian Academy of Science), Russia (2005 年 10 月 20 日)。
4. (with 熊ノ郷直人 (工学院大学)) Smooth functional derivatives in Feynman path integrals by time slicing approximation, 研究集会「数理解物理と経路積分」, 金沢大学自然科学研究科棟 101 教室, 及び, いしかわシテイカレッジ (2006 年 3 月 9 日-10 日) (2006 年 3 月 10 日に講演)。

田村 英男 Hideo Tamura

1. 指数積公式とシュレディンガー半群の基本解収束, 第 10 回「超局所解析と古典解析」, めかり山荘 (門司市) (2003 年 12 月)。
2. Some topics in exponential product formula (norm convergence, approximation to kernels of Schrödinger semigroups and Zeno product formula), 研究集会「数学解析のこれまでと今後の展望」, 湘南国際村センター第 6 研究室, 葉山 (2004 年 7 月 11 日)。

3. 指数積公式の話題 I –ノルム収束–, 指数積公式の話題 II –Schrödinger 半群の積分核近似, ゼノン積公式–, Encounter with Mathematics, — 数学との遭遇, 第31回「スペクトル・散乱理論–基本解への問いかけから学ぶ数理物理–」中央大学理工学部, 2004年10月1日–2日, (2004年10月2日に講演).
4. (with 一瀬 孝) Exponential product approximation to heat kernel of Dirichlet Laplacian and Zeno product, 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 2004年12月20日–12月22日, 京都大学数理解析研究所 (2004年12月20日).
5. Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields, 「作用素論セミナー」, 京都大学数理解析研究所 (2005年4月15日).
6. Semisclascal analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields, 金沢大学理学部 (自然科学研究科)「数理学談話会」, 金沢大学理学部 (2005年5月24日).
7. Semiclassical analysis for magentic scattering by two solenoidal fields, Invited Lecture at the International Workshop “Operator Semigroups, Evolution Equations and Spectral Theory in Mathematical Physics” (organized by V.A.Zagrebnov and E.M.Ouhbaz), C.I.R.M., Luminy/Marseille, October 3–7, 2005(2005年10月6日に講演).
8. Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields, Invited Lecture at “Analyse spectrale en Physique Mathématique Méthodes semi-classiques, états cohérents, diffusion quantique”. 22–24 mai 2006, Université de Nantes, Faculté des Sciences, Colloque en l’honneur de Didier Robert (2006年5月23日に講演).
9. Aharonov–Bohm effect in scattering by two solenoidal fields, 研究集会 “Recent Topics on Differential Equations”, 群馬大学東京オフィス, 東京都江戸川区船堀 (2006年10月21日).

谷島 賢二 Kenji Yajima

1. Schrödinger 方程式の基本解, 日本数学会 2004 年会 総合講演, 筑波大学 (2004 年 3 月 29 日).
2. Existence and regularity of the Schroedinger propagator, Math-Phys Seminar, Dept. Math. Università di Roma “La Sapienza”, Roma/Italy (2004 年 10 月).
3. Dispersive estimate for Schrödinger equation with threshold singulaities, XI-th meeting on Hyperbolic Equation IPERPISA 2004, L’ecole Normale Superior Pisa, Pisa/Italy (2004 年 10 月).
4. Regularity and decay estimates for Schrödinger equations, Encounter with Mathematics — 数学との遭遇, 第31回「スペクトル・散乱理論 – 基本解への問いかけか

ら学ぶ数理物理-」, 中央大学 理工学部, 2004 年 10 月 1 日-2 日 (2004 年 10 月 1 日に講演).

5. Dispersive estimate for Schrödinger equation with threshold singularities, Math-Physic Seminar, University of Bologna, Bologna/Italy (2005 年 2 月).
6. The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities, Winter School on “Mathematical Method in Quantum Mechanics”, Bressanone/Italy (2005 年 2 月).
7. On time dependent Schrödinger equations, Pisa-Roma Joint Seminar on Mathematical Physics, Università di Roma, Roma/Italy (2005 年 3 月).
8. Time periodic Schrödinger equations, Pisa-Roma Joint Seminar on Mathematical Physics, Università di Roma, Roma/Italy (2005 年 3 月).
9. The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities, COE Seminar in Keio, 慶応大学理工学部 (2005 年 5 月).
10. The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities, Mathematical Physics Seminar, St. Petersburg State University, St. Petersburg/Russia (2005 年 10 月).
11. 波動作用素の L^p 有界性, 研究集会「微分方程式と数理物理」白樺ハイツ (2005 年 11 月).
12. 波動作用素の L^p 有界性とその応用, 発展方程式シンポジウム, 東海大学理工学部 (2006 年 2 月).
13. シュレーディンガー作用素の波動作用素の L^p 有界性, 研究集会「数理物理と経路積分」, 金沢大学自然科学研究科棟 101 教室, 及び, いしかわシテイカレッジ (2006 年 3 月 9 日-10 日) (2006 年 3 月 10 日に講演).
14. 4 次元シュレーディンガー作用素の波動作用素の L^p 有界性, 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2007 年 2 月 5 日-7 日 (2007 年 2 月 5 日に講演).

岩瀬 順一 Zjuñici Iwase

1. (with 松本 幸夫 (東京大学大学院数理科学研究科)) Pochette surgery on 4-manifolds II, 4 次元トポロジー研究集会, 広島大学学士会館 2 階, 2007 年 1 月 29 日-月 31 日 (2007 年 1 月 29 日に講演).

Pavel Exner (本研究課題と関連するもののみ)

1. Schrödinger operators on graphs: how to understand the vertices, 金沢大学理学部「数理学談話会」(2005年2月2日).
2. Reflections on Zeno and anti-Zeno, The International Workshop “Operator Semigroups, Evolution Equations and Spectral Theory in Mathematical Physics” (organized by V.A.Zagrebnov and E.M.Ouhabaz), C.I.R.M., Luminy/Marseille, October 3–7, 2005(2005年10月4日に講演)
3. Unstable system dynamics: do we understand it fully ?, The 21st Max Born Symposium “Mathematical Problems in Nonrelativistic Quantum Dynamics”, Institute of Theoretical Physics, University of Wrocław, Wrocław/Poland, June 26–28, 2006 (2006年6月28日に講演).

Valentin A. Zagrebnov (本研究課題と関連するもののみ)

1. Trotter product formula and fractional powers of self-adjoint generators, Quantum Circle Seminar, Doppler Institute, Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering of the Czech Technical University, Prague/Czechia, August 17, 2004.
2. Trotter product formula, Georgia Institute of Technology, School of Mathematics Colloquium, July 15, 2005.

・研究成果

Trotter 積公式 または, Trotter–Kato 積公式, Lie–Trotter–Kato 積公式は, ふつう Hilbert/Banach 空間の強位相で収束するものであったが, 作用素ノルムに関する Rogava (1993) の抽象的な結果と Helffer (1994–95) のカツの転送作用素に関する仕事とが breakthrough を与えた。即ち, 非自明なときにも自己共役 Trotter・加藤積公式が作用素ノルムでも成り立つ場合があることを知ったことが, 本研究「作用素ノルム Trotter–Kato 積公式の更なる展開と経路積分の問題」及びそれまでの研究の動機であった。

この研究は, 偏微分方程式論としてのシュレーディンガー作用素論, 及び量子力学の経路積分の問題との双方にかかわっている。本研究に入る前の状況として, 既に2001年に, 研究者代表者一瀬は, 研究分担者 田村英男, 田村博志, 海外研究協力者 V. A. Zagrebnov との2編の共著論文

T.Ichinose and Hideo Tamura:

The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound,
Commun. Math. Phys. **217** (2001), No.3, 489–502,
Erratum, *ibid.* **254** (2005), No.1, 255–255;

T.Ichinose, Hideo Tamura, Hiroshi Tamura and V.A.Zagrebnov:

Note on the paper “The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound” by Ichinose and Tamura, Commun. Math. Phys. **221** (2001),

No. 3, 499–510,

において次のような作用素ノルム自己共役 Trotter–Kato 積公式を確立していた。

A, B を Hilbert 空間上の 2 つの下に有界な（必ずしも有界はでない）自己共役作用素とする。その定義域を $D[A], D[B]$ とする。作用素和 $C := A + B$ が $D[A] \cap D[B]$ 上で自己共役であるならば、

$$\begin{aligned}\|(e^{-tB/n}e^{-tA/n})^n - e^{-tC}\| &= O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \\ \|(e^{-tB/2n}e^{-tA/n}e^{-tB/2n})^n - e^{-tC}\| &= O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

が成り立つ。この収束は t について $[0, \infty)$ の有界閉区間上一様であり、誤差評価 $O(n^{-1})$ は最良である。

この結果は、無論、上述の Rogava, Helffer の結果含み、考えている状況で最良の最終的結果であると考えられる。実際、Schrödinger 作用素 $H = H_0 + V = -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$ への典型的な応用では、ポテンシャル $V(x)$ が、下に有界な無限遠で多項式増大する滑らかな関数の場合と 3 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 で正の Coulomb ポテンシャルの場合には $H = H_0 + V$ は $D[H_0] \cap D[V]$ 上自己共役になるから、作用素ノルム自己共役 Trotter・加藤積公式が誤差評価 $O(n^{-1})$ で成り立つことになる。

この結果を受けて、本研究では、更に先の問題である、次の 4 つのテーマを取り扱った。

- (1) 作用素ノルム Trotter 積公式 の更なる展開
- (2) 経路積分の問題、及び、Trotter 積の積分核の収束の問題
- (3) ゼノン (Zeno) 積公式
- (4) その他の関連する研究

以下でこの 4 項目について述べる。

(1) 作用素ノルム Trotter 積公式 の更なる展開

一瀬は、H. Neidhardt 及び V. A. Zagrebnov との共著論文 (J. Functional Analysis 2004) において、上述の作用素ノルム自己共役 Trotter・加藤積公式を、作用素和の場合から 2 次形式和の場合へ拡張した。一方の自己共役作用素 B が他方の自己共役作用素 A に関して 2 次形式の意味でドミネイトされ、これらの作用素の定義域の間に上述の反例を排除するようなある付帯条件を課して、最良の誤差評価と共に証明した。このドミネーション以外の条件は作用素 A, B について対称な自然な条件であるが、このドミネーションを仮定しないで、即ち A, B について対称な条件の下に証明できるかどうかは今後の問題であろう。ここで注意しておく、作用素ノルム自己共役 Trotter 積公式は 2 つの非負自己共役作用素 A, B の一般の 2 次形式和の場合には成立しないことは既知である（田村博志 [A remark on operator-norm convergence of Trotter–Kato product formula, Integral Equations Operator Theory 37 (2000), 350–356] による反例）。

また、自己共役ではなくユニタリ・Trotter 積公式に対しては作用素ノルム収束など言えないと最初思い込んでいたが、一瀬は田村英男との共同研究で、スカラーポテンシャルを持つディラック作用素と相対論的シュレーディンガー作用素に対するユニタリ群に対

する Trotter 積公式が, nontrivial な適当なポテンシャルの場合に, L^2 で強収束しているのみならず, 作用素ノルムでも収束していることを発見し, Lett.Math.Phys. 2004 誌に発表した。

(2) 経路積分の問題, 及び, Trotter 積の積分核の収束の問題

藤原大輔 (学習院大理) は, ファインマン経路積分の数学的定式化において既に顕著な先駆的業績を挙げている。区分的古典軌道を用いた時間分割近似法による大きな次元の空間での振動積分の停留位相法に基づいたものであった。熊ノ郷直人 (工学院大) との共同研究で, 今度は経路の折れ線を用いた時間分割近似法による経路積分の研究を行い更なる結果を得て 2005 年 Bull. Sci. Math. 誌に発表した。これもとに, 藤原は経路が区分的古典軌道の場合を再考し大次元での振動積分の停留位相法の剰余項評価を精密にすることに成功, それを用いて Feynman 経路積分の準古典近似の第 2 項の形を決めることができた。2006 年 J. Math. Soc. Japan 誌にこの成果を発表した。

Trotter・加藤積公式は, 経路積分的に言えば, 藤原の研究では (連続な) 時間分割経路による (実数時間) シュレーディンガー方程式的経路積分への近似であるのに対し, (不連続な) 時間分割経路による虚数時間シュレーディンガー方程式的経路積分への近似を与えていると言える。

ここで注目すべきことは, 藤原の結果は, 実は時間発展シュレーディンガー方程式の解というよりはむしろ基本解, 即ち, シュレーディンガー・ユニタリ群の積分核への近似を与えていることである。一瀬は, 本研究から明らかになった作用素ノルム自己共役 Trotter・加藤積公式の近似の良さから, もしかしたら, 積分核の各点収束も言えているのではないかという問題を田村英男と共に考えた。実際, 予想通りであって, 2004 年に Comm. PDE 誌に出版した共著論文において, 多項式オーダーで増大する滑らかなポテンシャルを持つシュレーディンガー半群に対して, 積分核も同じ良い誤差評価で収束していることを証明した。更なる共同研究で, ポテンシャルがすべての点で滑らかでなくても特異性を持つときも, 積分核がポテンシャルの特異点を除いた領域で局所一様収束するということを証明し, J. Reine Angew. Math. 2006 誌にこの成果を発表した。その論文には更に, ユークリッド空間のラプラス作用素の半群とある有界領域上の 2 乗可積分関数の空間への直交射影作用素との Trotter 積の積分核がこの領域の Dirichlet 境界条件つきラプラス作用素の半群の積分核に, 領域の内部で局所一様収束することも証明した。

ここで, Dirac 方程式に対する経路積分について触れるが, 以前一瀬は B. Jefferies と共著で 2002 年 J. Math. Phys. 誌に書いた論文で, radial Dirac equation に対する Cauchy 問題の基本解 (propagator) の具体的な構成を行い, 経路の空間上の可算加法的測度は存在しないことを証明した。その後, A. Inomata, H. Kleinert 等の物理学者が経路積分の方法で propagator ではなく Green 関数を導出するテクニックを用いると, radial Dirac equation に対して経路の空間上の可算加法的測度を構成して, その Green 関数の経路積分表示を与えることができ 2005 年 J. Math. Phys. 誌に発表した。

(3) ゼノン (Zeno) 積公式

これは, (2) の最後に述べた, ユークリッド空間のラプラス作用素の半群をユニタリ群に置き換えて, ある有界領域上の 2 乗可積分関数の空間への直交射影作用素との Trotter

積が L^2 で収束するか、という問題であり、一瀬は、海外共同研究者 Pavel Exner との共同研究で、量子ゼノン力学に関係する積公式の中間的結果を証明し、Ann. H.Poincaré 2005 誌にそれを書いた。目下、目標の結果が証明できないかを検討中である。この問題は、研究計画書で述べた constraint のある経路積分の問題の特殊な場合になっていると考えられるが、一般の問題は大変ハードな問題であり、今後も続けて考えて行きたい。

(4) その他の関連する研究

田村英男（岡山大理）は、2つのソレノイダル磁場による散乱理論に対する大変ハードな準古典解析を行い、アハラノフ・ボーム効果に関する研究を更に深化させた。

谷島賢二（学習院大理）は、シュレーディンガー作用素論について次のような深い結果を得た：(i) ポテンシャルが無限の遠方で急速に増大するシュレーディンガー方程式の解の平滑化作用のオーダーは対応する古典粒子のコンパクト集合上での平均滞在時間によって決定されることを示した。(ii) ポテンシャルが無限の遠方で減少するシュレーディンガー方程式の解の分散型評価を、対応するシュレーディンガー作用素が連続スペクトルの下端で特異性を持つ場合に求めた。(iii) ポテンシャルが無限の遠方で減少するシュレーディンガー作用素に対する波動作用素のルベグ空間での連続性を作用素が連続スペクトルの下端で特異性を持つ場合に研究した。

田村英男教授との色々な局面での数々の討議、及び、谷島教授からの Schrödinger 作用素論に関する具体的な研究情報は大変有益であった。

確率解析は経路積分の問題と係わる分野であり、その手法による次のアプローチがなされた。

田村博志は、伊藤恵一（摂南大学）と共に、確率論の対象としてのフェルミオン過程、ボゾン過程を統計力学の立場から、熱力学的極限を経て再現する手法を与えた。その方法の応用として、ボーズ・アインシュタイン凝縮との関連から新たな確率場を導き、また、パラ粒子ガスを記述する確率場は通常のフェルミオン [ボゾン] 過程の重ねあわせとして得られることを示した。

高信敏は、平成 16 年度は、有限整アデール環 $\hat{\mathbb{Z}}$ 上の極限定理についての研究し、平成 17 年度は、Rough path analysis について、無理数回転による擬似乱数に関して、キャンセレーションの方法による安富の条件の改良、及び、数論における極限定理の Adelic formulation による効用について研究し、平成 18 年度は、オイラー定数のランダム化した際に現われる極限定理を新たな発見をした。中尾慎太郎は、Stieltjes-Young 積分、及び、Dirichlet 空間に付随したマルコフ過程の加法的汎関数の確率解析的、特にエネルギー零の加法的汎関数を中心に研究した。

経路積分は多様体の曲線・経路達に渡る‘積分’であるが、岩瀬順一は、特殊な曲線であるところの結び目 (knots) に関する次のような結果を得た。pochette (境界を持った 4 次元多様体 $S^1 \times D^3 \# D^2 \times S^2$) を 4 次元多様体に埋め込みその内部を取り除き境界間の別の同相写像で貼り戻す作業、pochette surgery で得られる多様体の可微分同相類を研究し、特に、2 次元結び目で分岐した二重被覆について、結び目の局所的な改変が二重被覆のどのような pochette surgery に対応するかを調べ有理タングルのスピンの場合には完全な解答を得た。

以上のように、本研究はその研究計画で述べられたものに沿う然るべき成果を上げてきたとともに、更に今後の新しい研究の萌芽も得られたように思われる。

情報収集、レビューを受けるためのみならず、それと併せて研究成果の発表などのために、研究代表者・分担者は国の内外の各地へ出かけた。また、国の内外の研究者を金沢に招き専門知識の提供を受けた。以下はそれらを時間順序で記載する。

平成 16 (2004) 年

一瀬は、11月29日ー12月3日、フランスの Luminy/Marseille の C.I.R.M. (Centre International de Rencontres Mathématiques) で開催された Workshop “Infinite Dimensional Analysis and Path Integrals” (Organizers: Rémi Léandre and Cécile Dewitt-Morette) に招待され「極座標 Dirac 方程式の経路積分」について出席講演した。その前後の11月、12月、海外研究協力者である Pavel Exner 教授をチェコ科学アカデミー核物理学研究所に訪ね、また、ドイツのクラウスタール大学の Michael Demuth 教授を訪ね、本研究課題に係わる問題について討議した。

平成 17 (2005) 年

2月始めに、Pavel Exner 教授を金沢に招いて、共同研究中のテーマであるゼノン積公式について討議を行った。5月に、丁度来日中の斉藤義実教授 (University of Alabama, Birmingham) を金沢に招聘し本研究に係わる問題について討議した。

また、6月6日ー10日チェコのプラハで開催された第8回国際会議「Path Integrals: From Quantum Information to Cosmology」において「極座標 Dirac 方程式の経路積分」について講演のため、本研究費から一部サポートを受けて渡欧した。C. Dewitt-Morette 教授 (Austin, Texas) は体調が良くないらしく今回は出席されなかったが、J. R. Klauder (Florida), M. C. Gutzwiller (IBM, New York), L. S. Schulman (Potsdam, New York), A. Inomata (New York), H. Kleinert (Berlin) 各教授等の Feynman 経路積分に関する講演は今後の研究の上で示唆に富むことが多々あった。尚、この会議には藤原大輔教授も出席・講演された。

9月始めに、筑波大学を訪問のために来日した Eckhard Gier 助手 (Technische Universität Clausthal) を金沢にも招き、Random Schrödinger 作用素のスペクトルに関する専門知識の提供を受けた。

10月3日ー10月7日、フランスの Luminy/Marseille の C.I.R.M. (Centre International de Rencontres Mathématiques) で開催された International Conference “Operator Semigroups, Evolution Equations and Spectral Theory in Mathematical Physics” に招待され、“Recent Results on the Trotter Product Formula and Related Topics” について講演し、この問題に関する海外の専門家の関心を集めた。いくつかの質問が出て、中でも、確率論の V. Paulauskas 教授 (Vilnius 大学) は確率論の中心極限定理との関連に言及され、また、長年の知己である Jean-Michel Combes 教授 (CPT, Marseille 大学/Toulon 大学) の我々のユニタリ・トロッター積公式に関する結果に興味を示された、ことは印象に残った。この Conference の organizers は、V. A. Zagrebnoy と E. M. Ouhabaz であったが、前者は言うまでもなく本研究課題の海外研究協力者である。尚、この Conference には田村

英男教授も出席・講演された。

この国際会議の前に、台湾の Chung Yuan Christian University (Chung-Li) で開催された国際会議「International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization with Its Applications (ICNAOA) 2005」(9月30日-10月3日)の初日に、同じテーマで招待講演を行った。また、上のフランスでの国際会議の帰途アイルランドのダブリン高等研究所(Dublin Institute for Advanced Studies, Dublin, Ireland)に招かれ、10月12日に“Path Integral for the radial Dirac equation”とその場の量子論への応用も示唆する内容の講演を行った。所長の Tony Dorlas 教授と討議した。

平成18(2006)年

関連する問題の表現論における行列式について、1月若山正人教授(九大数理)を、また、周期的な係数をもつ1次元シュレーディンガー作用素の Green 関数について、土田哲生助教授(名城大理工)を、共に専門知識の提供を受けるため金沢に招聘した。

一瀬は、6月26日-28日ポーランドのヴォラツウ大学理論物理学研究所で開催された第21回 Max Born Symposium 「非相対論的量子力学の数学的諸問題」に招待され、若山正人教授との共同研究の成果「非可換調和振動子に対するスペクトル・ゼータ関数」について招待講演を行った。多くの質問が出てこの講演は好評だったようだ。このシンポジウムの後リトアニアのヴィルニウスに飛び、6月25日-30日の期間開催されている第9回国際ヴィルニウス会議「確率論と数理統計」に最後の2日間参加し、6月30日「極座標ディラック方程式の経路積分」について発表した。この会議と合わせて、作用素ノルム指数積公式に興味を持つ本会議のオーガナイザーで本会議主催の Chairman である V. Paulaskas 教授(ヴィルニウス大学)とリトアニア科学アカデミー数学・情報部門の V. Bentkus 教授から、会議後のヴィルニウスへの招待を受けた。この話題に関連する問題について討議した。尚、V. Bentkus 教授には、以前一瀬と田村英男教授との Commun. Math. Phys. **217**(2001) 誌共著論文の補題の条件のギャップを指摘されていた、そのお蔭で訂正を一瀬孝の業績中の論文 7 (Commun. Math. Phys. **254** (2005)) を書くことができた。

10月末に、来日中の Rémi Léandre 教授(University of Bourgogne)を金沢に招き、無限次元解析と経路積分関する研究について専門知識の提供を受けた。

一瀬は、11月26日-12月2日ドイツのウルムの近くのブラウボーレン(Blaubeuren)のハインリッヒ・ファブリ研究所(Henrich-Fabri Institut)で開催された数学者・物理学者が集う会議「数理物理学における熱核」(Conference “Heat Kernels in Mathematical Physics”)に招待され、「ノルム収束の指数積公式」に関する我々の最近の成果について expository な招待講演を行った。会議のオーガナイザーのウルム大学の Wolfgang Arendt 教授、Frank Steiner 教授と半群の熱核に関連する問題について討議した。また、この会議で、以前から興味があった場の量子論におけるゼータ関数に係わる話題である Casimir energy や regularized determinant について多くの知見を得ることができたことは幸いであつた。

特に、これら多聞の機会は我が蒙を啓く幸いなる時間であつた。本科学研究費からのサポートに対して、ここに感謝の意を表したい。

最後に、本研究課題の成果の主な部分と今後の問題について述べた次の3編の資料【1】、【2】、【3】を本研究成果報告書の次頁から先に付けておく。

【1】一瀬 孝: 「経路積分, 指数積公式, そしてまた経路積分」,
2006年度日本数学会年会企画特別講演, 中央大学, 2006年3月28日 21-31 頁

【2】Takashi Ichinose: *On a product formula for quantum Zeno dynamics*,
京都大学数理解析研究所研究集会「量子解析におけるミクロ・マクロ双対性」
(2005年11月21日-11月23日) における講演 33-38 頁

【3】Takashi Ichinose and Hideo Tamura: *Note on the norm convergence of the unitary Trotter product formula*, *Lett. Math. Phys.* **70** (2004), 65-81 39-55 頁

【1】は、「経路積分」, 「指数積公式」とに関する本研究を概観し, 他の研究との関連を意識しつつ, この企画特別講演の予稿集のために書いた原稿を少し改訂したものである。【2】は, ゼノン (Zeno) の積公式に関して, できていることと未解決問題について論じたもので, 数理解析研究所講究録 No.1507 「量子解析におけるミクロ・マクロ双対性」(2006年7月), pp. 95-99, に掲載された。【3】は, 作用素ノルム unitary 積公式が Dirac 作用素, 及び, 相対論的 Schrödinger 作用素に対して成立することを述べたものである。尚, この論文を本成果報告書に付けることについては, 2007年2月8日, *Physics and Astronomy, Springer Science and Business Media* (P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands) から許可を得た。